

Chromosaurier

Bis vor 88 Millionen Jahren ein Regenbogen abgestürzt ist und dadurch die Farben zu Bruch gegangen sind, waren Chromosaurier die farbenfrohesten Dinosaurier. Das Besondere an Chromosauriern sind ihre farbigen Skelette:

Das **Skelett** eines Chromosauriers hat einen gewissen Skeletttyp und dieser ist durch eine zulässige Färbung gefärbt. Ein **Skeletttyp** ist dabei eine endliche Ansammlung von Knochen und Gelenken mit den folgenden Eigenschaften:

- (S1) Jeder Knochen verbindet zwei verschiedene Gelenke.
- (S2) Je zwei Gelenke sind durch höchstens einen Knochen miteinander verbunden.
- (S3) Das Skelett ist zusammenhängend, d.h. zu je zwei Gelenken gibt es eine Folge von Knochen, mit der man von dem einen Gelenk zum anderen gelangt.

Eine **zulässige Färbung** ist eine Färbung der Gelenke, sodass

- (S4) je zwei Gelenke, die durch einen Knochen miteinander verbunden sind, verschiedene Farben besitzen.

Beispiel. Links ist ein Skeletttyp eines Chromosauriers zu sehen; die Zahlen geben die Farben einer zulässigen Färbung an. In der rechten Abbildung ist keine der Bedingungen (S1), (S2), (S3) erfüllt.




Die **Chamäleonanzahl** $ch S$ eines solchen Skeletttyps S ist die kleinste Anzahl von Farben, die nötig ist, um die Gelenke von S zulässig zu färben.

Da aus versteinerten Chromosaurierskeletten die Färbungen nicht mehr direkt zu rekonstruieren sind, ist es für Chromosauarologen essentiell, die Chamäleonanzahl der gefundenen Skeletttypen zu bestimmen. Da dies nicht immer ganz einfach ist, wollen wir den Chromosauarologen ein bisschen helfen und wenigstens die eine oder andere Abschätzung herleiten.

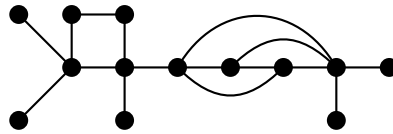
Zum Einstieg betrachten wir Knochenknoten: Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man einen Skeletttyp als **n -fachen Knochenknoten** K_n , wenn er genau n Gelenke besitzt und jedes Gelenk mit jedem anderen durch einen Knochen verbunden ist. Links ist zum Beispiel ein dreifacher Knochenknoten zu sehen, rechts ein fünffacher.



Beispiel (Knochenknotenabschätzung). Sei n eine natürliche Zahl. Ist S ein Skeletttyp eines Chromosauriers, der einen n -fachen Knochenknoten enthält, so ist $ch S \geq n$.

Lösung. Ist K_n ein n -facher Knochenknoten in S , so sind in einer zulässigen Färbung von S alle Gelenke von K_n verschieden gefärbt (da ja je zwei davon durch einen Knochen direkt verbunden sind und deshalb unterschiedliche Farben erhalten müssen). Also werden mindestens n Farben benötigt. Somit ist $ch S \geq n$. 

- ☐ **Aufgabe 1 (Tetrachromatosaurier*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Bei Ausgrabungen wurde der folgende Chromatosaurierskeletttyp entdeckt.



Welche Chamäleonzahl besitzt er? Begründe Deine Antwort!

Hinweis. Du musst zeigen, dass es eine zulässige Färbung mit der behaupteten Anzahl von Farben gibt und dass es keine zulässige Färbung mit weniger Farben gibt!

- ☐ **Aufgabe 2 (Schwarz-Weiß?!*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Kann es einen Chromatosaurier mit genau 2019 Gelenken und 2019 Knochen gegeben haben, dessen Gelenke mit nur zwei Farben gefärbt waren? Begründe Deine Antwort!

Hinweis. Beachte, dass jeder Chromatosaurier (S3) erfüllt!

- ☐ **Aufgabe 3 (Gradabschätzung*** [4 Punkte]). Der Grad $d(S)$ eines Skeletttyps S ist die größte Anzahl von Knochen, die in einem Gelenk von S zusammentreffen.

- Bestimme für jede natürliche Zahl n den Grad $d(K_n)$ des n -fachen Knochenknotens K_n .
- Zeige: Für jeden Skeletttyp S gilt $\text{ch } S \leq d(S) + 1$.

- ☐ **Aufgabe 4 (Baum-Chromatosaurier**** [4 Punkte]). Chromatosaurier, die auf Bäumen lebten, haben die folgende zusätzliche Eigenschaft: Ihre Skeletttypen enthalten *keine* Knochenkreise. Ein **Knochenkreis** ist dabei eine nicht-leere Folge g_1, \dots, g_n von verschiedenen Gelenken, so dass es Knochen zwischen g_1 und g_2 , zwischen g_2 und g_3, \dots , zwischen g_{n-1} und g_n , sowie zwischen g_n und g_1 gibt.

Zeige: Ist S der Skeletttyp eines Baum-Chromatosauriers, so ist $\text{ch } S \leq 2$.

Hinweis. Der linke Skeletttyp könnte von einem Baum-Chromatosaurier stammen, der rechte nicht.



- ☐ **Aufgabe 5 (Knochenabschätzung**** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Sei S ein Skeletttyp mit genau k Knochen. Zeige, dass dann folgendes gilt:

$$\text{ch } S \cdot (\text{ch } S - 1) \leq 2 \cdot k$$

- ☐ **Aufgabe 6 (Chromatosaurus Rex***** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Zeige, dass es einen Skeletttyp S gibt, der *keinen* dreifachen Knochenknoten enthält, und trotzdem $\text{ch } S \geq 4$ erfüllt.

Hinweis. Es gibt eine Lösung mit elf Gelenken.