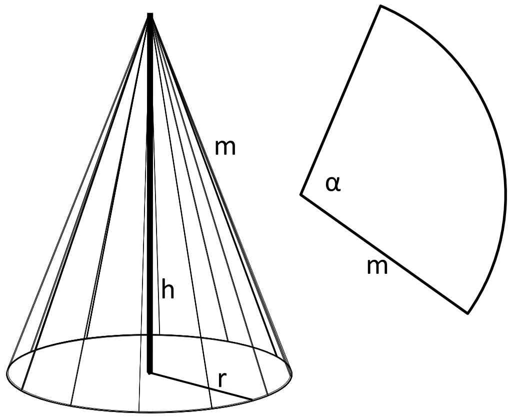
Aufgaben mit CAS

1. *Die Schultüte*



Ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel $\alpha = 90°$ (120°; 180°; 270°) und dem Radius m = 8 cm wird zu einem Kegel zusammengebogen. Wie groß ist sein Volumen?

Stelle nun allgemein einen Term $V(\alpha)$ auf, der das Volumen in Abhängigkeit vom Winkel α beschreibt.

Für $\alpha = 0°$ und $\alpha = 360°$ ist das Volumen des Kegels natürlich Null. Bei einem Mittelpunktswinkel α_o dazwischen wird das Volumen maximal. Ermittle graphisch diesen Winkel.

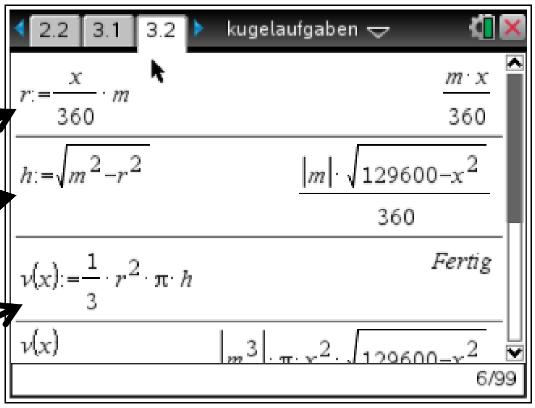
2. *Minimale Zylinderoberfläche*

Gesucht ist ein Zylinder mit Volumen 1 m³ und möglichst kleiner Oberfläche.

(Anleitung: Stelle einen Term zur Berechnung der Oberfläche in Abhängigkeit von r und h auf. Drücke mit Hilfe des bekannten Volumens h durch r aus. Untersuche graphisch, bei welchem Radius r die Oberfläche minimal wird.)

Schultüte – Lösungsstrategie mit CAS

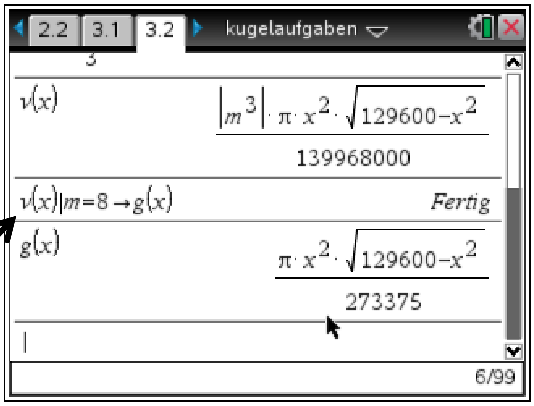
Zuerst berechnet man für die vorgegebenen Winkel das Volumen des Kegels.
Dabei stellt man fest, dass die Bogenlänge des Sektors $\frac{\alpha}{360°}2m\pi=2r\pi$ gleich dem Umfang der Grundfläche es Kegels ist.
Außerdem braucht man einen Zusammenhang zwischen der Höhe, dem Radius und der Mantellinie des Kegels.



Da man im Weiteren das Volumen in Abhängigkeit vom Mittelpunktswinkel berechnet, wird dieser als x bezeichnet. (Jeder andere Buchstabe ist auch denkbar.)

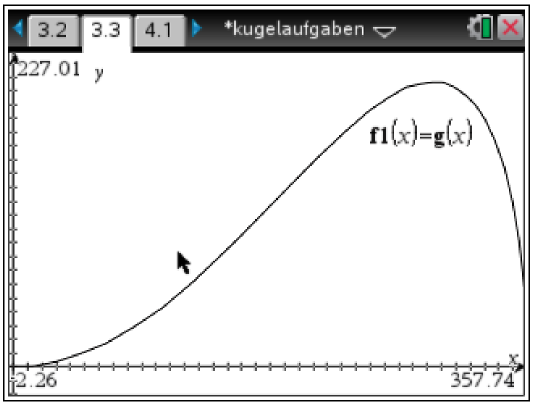
Weil m für das CAS auch negativ sein könnte, wird der Betrag von m ausgegeben.

Mit der Anweisung „mit der Eigenschaft m=8“ kann die Variable m durch einen Zahlenwert ersetzt werden. (Wenn m:=8 definiert wird, gilt das solange, bis m neu definiert wird, oder mit „delvar m“ die Definition aufgehoben wird.) Dieser Term wird als Funktion g(x) abgespeichert.



Die ersten Ergebnisse lassen sich leicht überprüfen: g(90), g(120), g(180), g(270).

Im Graphikfenster wird der Graph von g gezeichnet: f1(x)=g(x)



Da Winkel zwischen 0° und 360° eingesetzt werden können, müssen die Fenstereinstellungen entsprechend angepasst werden (x_{min}=0, x_{max}=360).
Wenn man keine Idee hat, wie groß die Funktionswerte g(x) werden, kann man die „Zoom-Anpassung“ (menü → Fenster) verwenden. Dies hilft jedoch nicht in jedem Fall!

Mit menü → Graph analysieren lässt sich das Maximum finden.

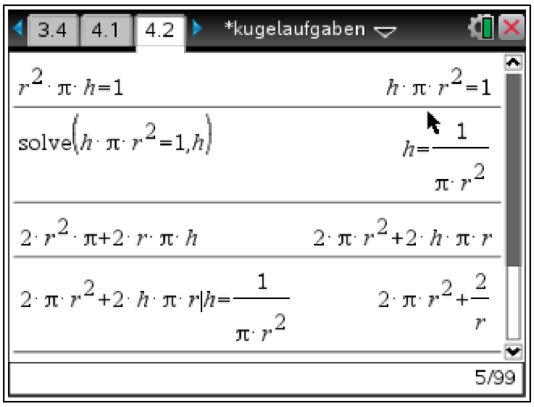
<u>Kompetenzen:</u>

- Terme eingeben und vereinfachen
- Variablen durch Zahlenwerte oder Terme ersetzen
- Funktionen definieren und ihren Graph zeichnen
- Fenstereinstellung anpassen
- Graph analysieren

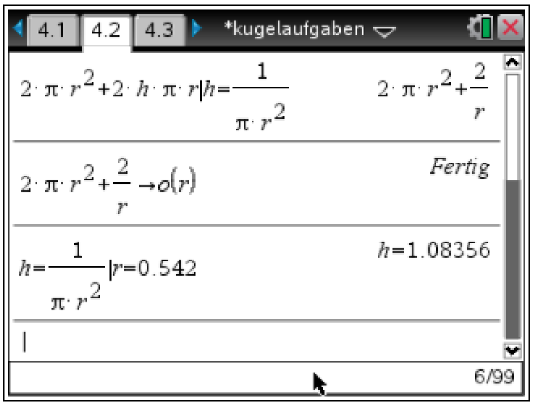
Minimale Zylinderoberfläche – Lösungsstrategie mit CAS

Das Volumen für einen Zylinder mit Radius r der Grundfläche und Höhe h wird gleich 1 gesetzt und nach h aufgelöst.

Im Term für die Oberfläche des Zylinders wird die Variable h durch einen Term in r ersetzt.

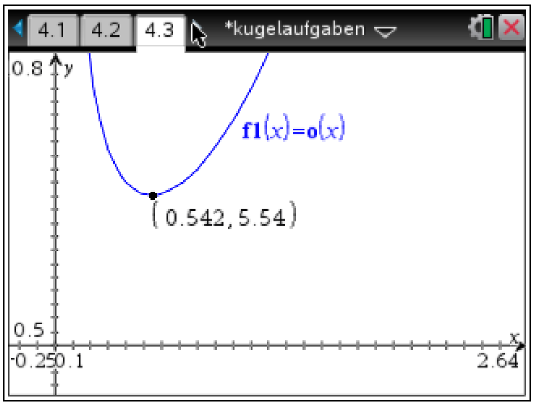


Dieser Term wird als Funktion o(r) abgespeichert.



Im Graphikfenster wird der Graph von o(x) gezeichnet. Im Graphikfenster erwartet das CAS x als unabhängige Variable. Fenstereinstellungen anpassen!

Dann sucht man das Minimum (menü → Graph analysieren) und findet dieses bei r = 0,542. Die Genauigkeit der Anzeige lässt sich erhöhen (Mauszeiger auf die x-Koordinate des Punktes, dann ctrl menü → Attribute).



Ersetzt man im Calculator r durch 0,542, so stellt man fest, dass h genau doppelt so groß ist.

Eine Zylinderdose hat also minimale Oberfläche, wenn der Durchmesser genauso groß ist wie die Höhe; das lässt sich an vielen Dosen nachprüfen.

Kompetenzen:

- Terme eingeben und vereinfachen
- Variablen durch Zahlenwerte oder Terme ersetzen
- Funktionen definieren und ihren Graph zeichnen
- Fenstereinstellung anpassen
- Graph analysieren